準線型楕円型境界値問題の最近の発展について(非線形楕円型偏微分方程式の解)

林田, 和也

数理解析研究所講究録
679巻 1989年 40-57

準線型楕円型境界値問題の最近の発展について

金沢大理　林田和也
(Kazuya Hayasida)

§1. 序

準線型楕円型境界値問題の内容を整理すれば，一応以下のように分類される：

(弱)解の存在 (弱)解の正則性	単独方程式 方程式系
Dirichlet境界条件 Neumann境界条件 斜交境界条件	一様楕円性 退化楕円性

これらはお互いに複雑に関係し合っており，判然と区別出来るものではない。従って以下に述べる内容は必ずしもこの分類に沿っているものではない。又，これは一つの見方であり，他のいろいろな見解が存在するであろうことは当然である。

§2. 代表的な例

今後，Ω は R^n 内の有界領域とする。準線型楕円型方程式の代表的なものは以下の2つである様に思われる：

(2.1) $\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \qquad (1 < p < \infty)$

(2.2) $\nabla\cdot(|u|^{\gamma}\nabla u) + \cdots = f \qquad (0 \leqq \gamma < \infty)$.

(2.2)については，$|u|^{\gamma}\nabla u = \frac{1}{1+\gamma}\nabla(|u|^{\gamma}u)$ とかけるから低階がないと意味がない。(2.1)を簡単に $\Delta_p u = f$ とかくことにする。

(2.1)の由来についていえば，非 Newton 流体の定常流，そして次の変分量の Euler-Lagrange 方程式である：

(2.3) $J(v) = \frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla v|^p dx + \int_{\Omega} f v\, dx.$

(2.2)の由来についていえば，それは porous media 方程式の定常解である。エコロジーにおける1つの重要な数理モデルの定常解は(2.2)を連立させたものである。これらのことから(2.2)の解については非負を仮定するのが自然に思われる。

(2.1), (2.2)はいずれも退化楕円型である。これらの一様楕円型方程式による1つの近似はそれぞれ

$$\nabla\cdot((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u) = f,$$

$$\nabla\cdot((\varepsilon + u^2)^{\frac{\gamma}{2}}\nabla u) + \cdots = f, \quad \varepsilon > 0$$

で与えられる。後者の低階項について適当な条件があると

する。

$\partial\Omega$ は $C^{2,\alpha}$ 級 $(0<\alpha<1)$ で，$f\in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ とする。このとき，$u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ で $u=0$ on $\partial\Omega$ となる解 u がそれぞれに存在することが分る（[6]）。証明の基本方針は線型楕円型方程式の Schauder 評価式，並びに Leray-Schauder の不動点定理による。従って (2.1), (2.2) の楕円性の退化が問題になる。

§3. 弱解の存在

まず方程式 (2.1) について考える。Sobolev 空間 $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(1\leqq p<\infty)$ を V とかく。V' は V の双対空間である。

$f\in V'$ に対して (2.1) の解 $u\in V$ が一意的に存在することが分る。すなわち，Dirichlet 問題が解ける。その証明方針は $W_0^{1,p}(\Omega)$ が $1<p<\infty$ のとき，separable かつ reflexive であることと，作用素 $-\Delta_p$ が単調であることなどを用いて Galerkin 近似法に帰着させることである（[13]）。

この証明法は Neumann 条件，Dirichlet-Neumann 混合型条件の場合も平行である。例えば Neumann 問題の場合，(2.1) に適当に低階の項をつけて，V として $V=W^{1,p}(\Omega)$ にとればよい。

$p=1,\infty$ に相当する (2.1) の方程式にこの方法は適用されない。何故ならば，$L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ は reflexive でないから

である。この場合については次節で述べることにする。

次に方程式(2.2)について，低階の適当な条件のもとに弱解 u で $|u|^{\gamma}u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ をみたすものが存在することが Galerkin 近似法でより容易に分る。

次の様な(2.1),(2.2)の混合型方程式：

$$\nabla\cdot(|u|^{\gamma}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\cdots=f$$

の Dirichlet 問題の弱解の存在については 1968 年 P. Z. Mkrtychan [16] によって示されている。

§4. 平均曲率方程式

$p=1$ のとき，(2.1)に相当する方程式として次のものがある：

$$\nabla\cdot\left((1+|\nabla u|^2)^{-1/2}\nabla u\right)=f \tag{4.1}$$

一般に曲面 $z=u(x)$ に対して，$\frac{1}{n}\nabla\cdot\left((1+|\nabla u|^2)^{-1/2}\nabla u\right)$ をこの曲面の平均曲率といい，H で表わす。

(4.1)は $|\nabla u|\to\infty$ のとき，楕円性が退化するので非一様楕円型方程式である。又これは次の変分量の Euler-Lagrange 方程式である：

$$J(v)=\int_\Omega\sqrt{1+|\nabla v|^2}\,dx+n\int_\Omega Hv\,dx$$

更に(4.1)は非線型弾性波動方程式の定常方程式でもある。

1971 年 J. Serrin [17] によって次の結果が知られている：

$\partial\Omega$ は $C^{2,\alpha}$ 級 $(0<\alpha<1)$，$H\in C^1(\bar{\Omega})$ とする。更に

$\exists\, \varepsilon_0 > 0$;

(4.2) $\left|\int_\Omega H\eta\, dx\right| \leqq n^{-1}(1-\varepsilon_0)\int_\Omega |\nabla\eta|\, dx \quad \forall \eta \in C_0^1(\Omega)$

を仮定する。そのとき，$\exists^1 u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$; u は Ω で (4.1) をみたし，$u = 0$ on $\partial\Omega$. ここでもし $\partial\Omega$ における u の data が $\neq 0$ ならば，$\partial\Omega$ において境界平均曲率と H の間に，ある関係がみたされなければならない。

その証明の基本は Leray - Schauder の不動点定理を用いることである。そのために準備すべき1つの命題は次である：

$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ が (4.1) をみたしているならば，$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leqq c$，但し，$c$ は Ω, H のみに依存する定数である。

この評価式は barrier 函数の存在を用いて証明される。この方法は Schauder 空間内で展開される議論であるが，別の方法もいくつかある。

$\partial\Omega$, H に滑らかさが全然ない場合，仮定 (4.2) のもとで $\partial\Omega$ で $u = 0$ となる (4.1) の解 $u \in BV(\Omega)$ (bounded variation) が極小列の方法によって M. Giaquinta [5] によって示された。

$BV(\Omega)$ は $W^{1,1}(\Omega)$ よりわずかだけ広く，このことは重要な問題を残している。§3 で述べたことより $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ が成り立つように見えるが，実際はその様には行かない。

[17]と[5]との間を埋めるものとして，G.V. Caffarelli [2]の結果がある。これは$\partial\Omega$が滑らかで$H \in L^p(\Omega)$ $(p>n)$かつ$\mathrm{supp}\, H \subset \Omega$の場合，仮定(4.2)のもとで$\partial\Omega$で$u=0$となる(4.1)の解$u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ $(\alpha = 1-\frac{n}{p})$が存在するという結果である。

なお，(4.1)の一様楕円型方程式による1つの近似は

$$\nabla\cdot((\varepsilon_\nu + (1+|\nabla u|^2)^{-1/2}\nabla u) = f, \quad \varepsilon_\nu \downarrow 0 \tag{4.3}$$

である。Ωが滑らかでない場合，Ωの$C^{2,\alpha}$級の近似列$\{\Omega_\nu\}$をとる。$f \in W^{1,\infty}(\Omega)$とする。各$\Omega_\nu$上で(4.3)をみたし，$\partial\Omega_\nu$で$0$となる解$u_\nu \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$をとる。そのとき，$\bar{\Omega}' \subset \Omega$なる部分領域$\Omega'$に対して

$$\int_{\Omega'} (1+|\nabla u_\nu|^2)^{-3/2} |\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_\nu|^2 \, dx \leqq C, \quad i,j = 1, \cdots, n$$

がなりたつ([9],[18])。但し，CはΩ'に依存するが，νには依存しない。この評価式を用いて，$\partial\Omega$で0となる(4.1)の解$u \in W^{1,1}(\Omega)$を求めることも出来る。

(4.1)に対するDirichlet - Neumann混合型境界値問題については，R. Teman [19]の結果がある。それによれば，境界データがたとえ十分滑らかであっても$W^{1,1}(\Omega)$に入る以上のことは分っていない。それ以上の正則性を出すことは困難である様に思われる。

§5. 非線型部分が指数型の場合

$p=\infty$ のとき，(2.1) に相当する方程式を考える。(2.3) の変分量 $J(v)$ の中で $\int_\Omega |\nabla v|^p dx$ を同等な量 $\sum_i \int_\Omega |\partial_{x_i} v|^p dx$ でおきかえれば，新しい Euler－Lagrange 方程式 $\sum_i \partial_{x_i}(|\partial_{x_i} u|^{p-2}\partial_{x_i} u)=f$ が得られる。この方程式を一般化して次の方程式を考える：

$$(5.1)\qquad \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(\phi(\partial_{x_i} u))=f$$

但し，ϕ は一般には多項式函数ではなく，例えば $\phi(t)=e^{|t|}t$ である。

(2.1) に対応する方程式 (5.1) では $\phi(t)=|t|^{p-2}t$ である。従って (5.1) の解の存在をいうためには函数 $|t|^{p-2}t$ に対応する函数空間が $W_0^{1,p}(\Omega)$ とすれば，函数 $e^{|t|}t$ に対応する函数空間をどのように決めるかが問題となる。

例えば $\{u ; \int_\Omega e^{|u|}dx<\infty\}$ なる空間は Banach 空間どころではなく線型空間にもなり得ない。そこでかかる空間を内包する新しい概念による Banach 空間を構成しなければならない。これが Orlicz 空間，Orlicz－Sobolev 空間の由来である（[1] 参照）。

一般には $\phi(t)\in C^0(R^1)$ は奇函数で $\phi(0)=0$，$\phi(\infty)=\infty$ かつ狭義単調増加とし

$$M(t)=\int_0^t \phi(\tau)d\tau,\quad \overline{M}(t)=\int_0^t \phi^{-1}(\tau)d\tau$$

とおく。Orlicz 空間 $L_M(\Omega)$, $L_{\bar{M}}(\Omega)$, $E_M(\Omega)$, $E_{\bar{M}}(\Omega)$ を定義し，Orlicz-Sobolev 空間 $W_0^1 L_M(\Omega)$, $W^{-1}E_{\bar{M}}(\Omega)$ を定義する。作用素 T を $Tu \equiv \sum_i \partial_{x_i}(\phi(\partial_{x_i}u))$ とおき，その定義域として，$D(T)=\{u\in W_0^1 L_M(\Omega);\ \phi(\partial_{x_i}u)\in L_{\bar{M}}(\Omega)\}$ とおく。

J.P. Gossez [7] によれば，$\partial\Omega$ が滑らかであるとき $^\forall f\in W^{-1}E_{\bar{M}}(\Omega)$, $^\exists u\in D(T);\ Tu=f$ が分る。この様に (2.1) に関連した方程式で非線型部分が多項式巾よりも増大する場合について not separable, not reflexive であるような Orlicz 空間の理論が弱解の存在に重要な役割を果すことが分っている。なお，この場合の弱解の正則性については今后に残された問題であろう。

§6. 弱解の内部正則性

まず方程式 (2.1) について考える。$f\in C^\infty_{loc}(\Omega)$ で $u\in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ が (2.1) の解であるとき，u は Ω で局所的にどの程度の正則性をもつか。このことについて次の例がある：$u(x)=\frac{p-1}{p}|x|^{\frac{p}{p-1}}$ とおけば，R^n で $\Delta_p u=n$。従って $p\neq 2$ ならば $u\in C^2_{loc}(\Omega)$ にさえもなり得ない。他方，このことは $p\to 2$ のとき，正則性がそれに応じて良くなるとは限らないことを意味している。すなわち，(2.1) で $p=2$ は正則性に関して不安定であるともいえる。

この問題について，一般には $u\in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ $(0<\alpha<1)$ で

あることが J. L. Lewis [10], P. Tolksdorf [20] などによって知られている。方程式 (2.2) については f が Ω で局所的にある程度滑らかならば，(2.2) の解 u ($|u|^{\gamma}u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$) は $C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$ に属する (例えば，[8], [22])。

なお，(2.2) は (2.1) と異なり正値解についてのみ $\gamma = 0$ は正則性に関して安定であろうと予想される。

§7. 境界上の正則点

まず方程式 (2.2) について考える。(2.2) を低階のない system に拡張した方程式系についてその解が $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ に属することが N. Ural'tseva [22] によって示された。但し，$\partial\Omega$ の各点は一様外部円錐条件をみたすとする。(2.2) に低階をつけた方程式について，解 u が $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ に属し，適当な条件のもとで $u \geqq 0$ であることが N. Ikebe any Y. Ohara [8] によって示された。

次に方程式 (2.1) について考える。$\partial\Omega$ が十分滑らかで Dirichlet 条件：$u = 0$ on $\partial\Omega$ の場合，$\partial\Omega$ の局所化と解 u の反射によって内部正則性に帰着される。そこで以下 $\partial\Omega$ が滑らかでない場合を考える。

$P \in \partial\Omega$ で f は十分滑らかとする。$\Delta u = f$ in Ω, $u \in W^{1,2}_{0}(\Omega)$ なるすべての u が P で連続，かつ $u(P) = 0$ をみたすならば，P を正則点という。P が正則点であるための

十分条件は Wiener's criterion としてよく知られている。それは Newton 容量で記述される判定条件である。

Δ を Δ_p, $W^{1,2}_0(\Omega)$ を $W^{1,p}_0(\Omega)$ でおきかえてもそのまゝ $\partial\Omega$ 上での正則点が定義される。このとき，$P \in \partial\Omega$ が正則点であるための精密な十分条件が存在するのであろうか。1970年 V. G. Mazja [14] によってそれが与えられた。それは Wiener's criterion の中で Newton 容量の代りに次で定義される p−容量でおきかえたものである：

$$C_p(E) = \inf_{v \in \mathfrak{K}} \int_{R^n} |\nabla v|^p \, dx$$

ここで，$\mathfrak{K} = \{ v \in W^{1,p}(R^n) ; \ v \geqq 1 \text{ on } E \}$。$p = 2$ のときこれは Newton 容量である。従って，Wiener's criterion は本来 $\Delta_p u = f$ と係わっているものと考えるのが自然であると思われる。

更に [14] の結果の証明は R. Gariepy and W. P. Ziemer [4] によって洗練されたものになった。なほ，これらの結果の system（方程式系）への拡張は可能であろうか。これは今后に残された問題であると思う。

§8. 準線型楕円系

K. Uhlenbeck は1977年次の方程式系

(8.1) $\quad -\nabla \cdot \left(\Phi\left(\sum_{k=1}^{N} |\nabla u_k|^2 \right) \nabla u_i \right) = f_i, \quad i = 1, \cdots, N$

の解の内部正則性を示した（[21]）。ここで $\Phi(t)$ は次の条件

をみたすとする：$p \geqq 2$ で $^{\exists}K \geqq 1$；

$$K^{-1} t^{(p-2)/2} \leqq \Phi(t) \leqq K t^{(p-2)/2} \qquad (t \geqq 0).$$

他方，それまでに多くの人によって準線型楕円系の研究が行なわれてきた。ここでは $u=(u_1,\cdots,u_N)$, $p^i=(p^i_1,\cdots,p^i_n)$ $i=1,\cdots,N$, $\nabla u=(\nabla u_1,\cdots,\nabla u_N)$, $\mathbb{p}=(p^1,\cdots,p^N)$ $(\in R^{nN})$ とおく。

$i=1,\cdots,N$ に対して，$A^i(x,u,\mathbb{p})$, $B^i(x,u,\mathbb{p})$ はそれぞれ $\Omega\times R^{n+1}$ 上のベクトル，スカラー可測函数とし，次の方程式系を考える：

$$(8.2) \qquad -\nabla\cdot A^i(x,u,\nabla u)=B^i(x,u,\nabla u) \quad i=1,\cdots,N$$

ここで次の仮定をおく：$1<p<\infty$ で

$$(8.3) \quad \begin{cases} |A^i(x,u,\mathbb{p})|,\ |B^i(x,u,\mathbb{p})| \\ \qquad \leqq C(|\mathbb{p}|^{p-1}+|u|^{p-1}+1) \\ \sum_{i=1}^{N} p^i\cdot A^i(x,u,\mathbb{p}) \geqq |\mathbb{p}|^p - C(|u|^p+1) \end{cases}$$

(8.2)の Dirichlet 問題の解 $u\in[W^{1,p}_0(\Omega)]^N$ の存在については次の条件があればよい：$\forall x\in\Omega$, $\forall u\in R^1$, $\forall \mathbb{p},\mathbb{q}\in R^{nN}$

$$\sum_i [A^i(x,u,\mathbb{p})-A^i(x,u,\mathbb{q})]\cdot(\mathbb{p}-\mathbb{q}) \geqq 0$$

まず (8.2)の解 $u\in[W^{1,p}_0(\Omega)]^N$ が局所的に有界になるかどうかが問題になるが，$N\geqq 2$ のとき，J. Frehse [3] によって反例が作られている。しかし，$u\in[L^\infty(\Omega)]^N$ になるための1つの十分性が次の条件で M. Meier [15] によって

与えられた：

$$\exists\lambda>0;\quad I_A(x,u,\nabla u)\geqq-\delta|\nabla u|^p-\delta^{-\lambda}(|u|^p+1)$$

$0<{}^\forall\delta<1$，但し，$I_A(x,u,\nabla u)=\sum_{i,j}\frac{u_i u_j}{|u|^2}\nabla u_j\cdot A^i(x,u,\nabla u)$。

単独方程式の場合，この条件は勿論みたされている。(8.1)の場合，$I_A(x,u,\nabla u)=\Phi(\sum_k|\nabla u_k|^2)|\sum_i u_i\nabla u_i|^2/|u|^2$ $\geqq 0$ となるから，やはりこの条件はみたされている。

次に(8.2)の解 $u\in[W^{1,p}_0(\Omega)]^N$ が局所的に Hölder 連続になるかであるが，別のアプローチで K.O. Widman [23] によって示された。その条件は $\exists k=k(n,p)$；$n-k<p\leqq n$ である。

準線型楕円系の解の境界における(Hölder)連続性の問題は Dirichlet, Neumann 条件，又はそれらの混合条件のもとで今后に残された問題であろう。

§9. 斜交境界条件

線型楕円型方程式

(9.1) $\qquad a^{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u-c(x)u=f\quad \text{in }\Omega$

について考える。$\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ は $\partial\Omega$ における単位外法線とする。Neumann 境界条件 $a^{ij}(x)\gamma_i\partial_{x_j}u=0$ on $\partial\Omega$ の代りに斜交境界条件

(9.2) $\qquad \beta^i(x)\partial_{x_i}u=0\quad \text{on }\partial\Omega$

について考察する。ここで次を仮定する：$\exists\lambda>0$，$\exists c_0>0$；

$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqq \lambda|\xi|^2$, $c(x) \geqq c_0$ $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in R^n$,

$\beta^i(x)\gamma_i(x) \geqq \lambda$ $\forall x \in \partial\Omega$.

線型の場合の存在定理と評価式は以下の通りである：

「$\partial\Omega$ は $C^{2,\alpha}$ 級 $(0<\alpha<1)$ とし，$a^{ij}, c \in C^\alpha(\bar{\Omega})$，$\beta^i \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ とする。以上の仮定のもとで任意の $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ に対して (9.1)，(9.2) をみたす $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ が1つそして唯1つ存在する。そして次の評価式がなりたつ：

(9.3) $\quad |u|_{2,\alpha} \leqq C(|u|_0 + |f|_\alpha + |\nabla u|_0 [\beta]_{1,\alpha})$

但し，$|\ \ |_{m,\alpha}$ は $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ のノルムを，$|\ \ |_{0,\alpha}$ を $|\ \ |_\alpha$ で表わす。又，$[\ \ ]$ は有次ノルムである。そして C は $n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega$ にのみ依存する定数である。但し，$\Lambda = \max(|a^{ij}|_\alpha, |c|_\alpha, |\beta^i|_{1,\alpha})$」

今后，$\partial\Omega$ は $C^{2,\alpha}$ 級で $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ とし，特に次の準線型楕円型作用素 Q を考える：

$$Qu \equiv \nabla\cdot((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u) - cu - f$$

但し，$\varepsilon > 0$ で c は上の条件をみたすとする。これは

$$Qu = a^{ij}(\nabla u)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u - cu - f$$

とかける。境界作用素として

$$Nu \equiv \beta_i(\nabla u)\partial_{x_i}u$$

なるものを考える。$\beta_i(\nabla u)$ は適当な条件をみたすとする。例えば，$\beta_i(\nabla u) = (\varepsilon + |\nabla u|^2)\gamma_i$ である。

特に $\beta_i(\nabla u) \equiv \gamma_i$ の場合，Banach 空間 B として

$B = C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ にとれば，$\forall v \in B$, $\exists 1 u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$;

$$(9.3)\qquad \begin{cases} a^{ij}(\nabla v)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j} u - cu = f & \text{in } \Omega \\ \gamma_i\,\partial_{x_i} u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

この u を Tv とかく。T は B からそれ自身の中への写像で，Leray－Schauder の不動点定理の仮定をみたしていることが容易に分る。故にこの場合の境界値問題は解ける。

しかし，一般には (9.3) の代りに $v \in B$ に対して

$$\begin{cases} a^{ij}(\nabla v)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j} u - cu = f & \text{in } \Omega \\ \beta_i(\nabla v)\,\partial_{x_i} u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をまづ解かねばならない。しかし，これは $\beta_i(\nabla v) \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ とは限らないから，解けるとは限らない。故に Leray－Schauder の定理が適用されない。従って別の方法を採らざるを得ない。

G. Lieberman は Caristi の不動点定理 (Trans. AMS, 215 (1976)) を出発点として新しい方法を見出した。以下は彼の一連の論文（例えば，[11], [12]）による。

X, Y は 2つの Banach 空間で P は X から Y の中への写像とする。$x, \psi \in X$ について

$$P_x(\psi) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(P(x+\varepsilon\psi) - P(x)\right)$$

とおく。任意の $x, \psi \in X$ について $P_x(\psi) \in Y$ が存在するとき，P は gâteaux variation をもつという。

次の命題がなりたつ：

Pが Gâteaux variation をもち，$P(X)$がYで closed とする。しかも $^{\forall}x \in X$, $^{\exists}\psi \in X$; $P_x(\psi) + P(x) = 0$ を仮定する。このとき，$0 \in P(X)$ である。

この命題を用いて，$Qu = 0$ in Ω, $Nu = 0$ on $\partial\Omega$ を以下の方針で解く。

$X \equiv C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $Y \equiv C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$, $Pu \equiv [Qu, Nu]$ とおく。$P_u(\psi) + P(u) = 0$ を解くことは線型方程式の問題に帰着する。問題は $PC^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ が $C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ で closed なることを示すことであるが，その証明の中心は次の評価式を導くことである：

$u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ について $Pu = (g, \phi) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ とおけば，$|u|_{1,\alpha} \leqq C(Q, N, |g|_{\alpha}, |\phi|_{1,\alpha})$

詳しくは [11] にある通りである。

文　　献

[1] R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, 1975.

[2] G.V. Caffarelli, Superficie con curvature media assegnata in L^p, Bollettino U.M.I., (4) 8 (1973), 261-277.

[3] J. Frehse, Una generalizzazione di un controesempio di De Giorgi nella teoria delle equazioni ellittiche, Bollettino U.M.I., (4) 6 (1970), 998-102.

[4] R. Gariepy and W. P. Ziemer, A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations, Arch. Rat. Mech. Anal., 67 (1977), 25–39.

[5] M. Giaquinta, On the Dirichlet problem for surfaces of prescribed mean curvature, Manuscripta Math., 12 (1974), 73–86.

[6] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1977.

[7] J. P. Gossez, Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly increasing coefficients, Trans Amer. Math. Soc., 190 (1974), 163–205.

[8] N. Ikebe and T. Ohara, On the non-negative weak solutions of the Dirichlet problem for degenerate quasilinear elliptic equations, Funkcialaj Ekvacioj, 24 (1981), 103–111.

[9] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 677–703.

[10] J. L. Lewis, Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations, Indiana

Univ. Math. J., 32 (1983), 847-858.

[11] G. M. Lieberman, Solvability of quasilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 273 (1982), 753-765.

[12] G. M. Lieberman, The conormal derivative problem for elliptic equations of variational type, J. Differential Equations, 49 (1983), 218-257.

[13] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod Gauthier Villars, 1969.

[14] V. G. Maz'ja, On the continuity at a boundary point of the solution of quasi-linear elliptic equations, Vestnik Leningrad Univ., 25 (1970), 42-55

[15] M. Meier, Boundedness and integrability properties of weak solutions of quasilinear elliptic systems, J. Reine Ang., 333 (1982), 191-120.

[16] P. Z. Mkrtychan, Solvability of the first boundary value problem for higher-order quasilinear elliptic equations that are degenerate with respect to the independent variables, Zap. Naučn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov 7 (1968), 184-222.

[17] J. Serrin, Gradient estimates for solutións of nonlinear elliptic and parabolic equatións, Contributións to Non-linear Functiónal Analysis, Academic Press, 1971

[18] R. Teman, Solutións généralisées de certains équatións du type hypersurface minima, Arch. Rat. Mech. Anal., 44 (1971), 121-156.

[19] R. Teman, Applicatións de l'analyse convexe au calcul des variatións, Lecture Notes in Math., 543, Springer, 1975, 208-237.

[20] P. Tolksdorf, Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equatión, J. Differentiál Equat-ions, 51 (1984), 126-150.

[21] K. Uhlenbeck, Regularity for a class of nonlinear elliptic systems, Acta Math., 138 (1977), 219-240.

[22] N. N. Ural'tseva, Degenerate quasilinear elliptic syst-ems, Zap. Naučn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov, 7 (1968), 184-222.

[23] K. O. Widman, Hölder continuity of solutións of elliptic systems, Manuscripta Math., 5 (1971), 299-308.